Stablo

Jednostavan graf bez ciklusa je acikličan graf ili šuma. Povezan acikličan graf je stablo.

Lema 1. *U svakom stablu sa $n \geq 2$ čvora postoji čvor stepena 1.*

Dokaz: Ako bi stepen svakog čvora bio veći ili jednak 2 u grafu bi postojala kontura..... $\square$

Teorema 1. *Neka je G jednostavan graf sa n čvorova. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
(1) G je povezan bez kontura,
(2) G je povezan i ima $m = n - 1$ grana,
(3) G je bez kontura i ima ima $m = n - 1$ grana,
(4) G je bez kontura ali gubi to svojstvo dodavanjem grane između proizvoljna dva nesusjedna čvora,
(5) G je povezan ali gubi to svojstvo udaljavanjem proizvoljne grane,
(6) Svaka dva čvora grafa G povezana su jedinstvenim putem.

Dokaz: Pokazaćemo da važi sljedeći niz implikacija: $(1) \to (2) \to (3) \to (1)$ i $(1) \to (4) \to (5) \to (6) \to (1)$.

$(1) \to (2)$: Neka je G jednostavan povezan graf bez kontura sa n čvorova. Indukcijom po n pokazaćemo da G ima $n - 1$ granu. Za $n = 1$ i $n = 2$ tvrđenje očigledno važi. Neka je $n \geq 3$ i neka tvrđenje važi za sve povezane aciklične grafove sa $n - 1$ čvorova. Na osnovu leme 1., u G postoji čvor v stepena 1. Udaljimo ga iz grafa G. Graf $H = G - v$ zadovoljava induktivnu predpostavku pa ima $m_H = n_H - 1$ grana. Kako je $m_H = m - 1$ i $n_H = n - 1$, to je $m = n - 1$.

$(2) \to (3)$: Neka je G je povezan graf sa $m = n - 1$ grana. Treba pokazati da u G ne postoji kontura. Pretpostavimo suprotno. Udaljimo iz G granu sa konture. Dobijamo jednostavan graf koji je i dalje povezan. Postupak udaljavanja grana sa kontura nastavljamo sve dok ne dobijemo graf $H \subset G$ bez kontura. Na osnovu prethodno dokazanog koraka $(1) \to (2)$, graf H ima $n-1$ granu, što na osnovu sprovedene konstrukcije nije moguće.

$(3) \to (1)$: Pretpostavimo da važi uslov (3) i dokažimo da je G povezan. Neka je $\omega(G) = k$ i neka su $H_1, H_2, \ldots, H_k$ komponente povezanosti grafa G sa $n_1, n_2, \ldots, n_k$ čvorova i $m_1, m_2, \ldots, m_k$ grana, redom. Tada je $m_i = n_i - 1$, za svako $i = \overline{1,k}$, pa je $m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k$. Kako je $m = n - 1$, to je $k = 1$, odnosno G je povezan graf.

$(1) \to (4)$: Neka je G jednostavan povezan graf bez kontura i neka su u i v njegova dva proizvoljna nesusjedna čvora. U G postoji $(u-v)-$put P, pa je $P + uv$ kontura u $G + uv$.

$(4) \to (5)$: Neka su u i v dva nesusjedna čvora. Dodavanjem grane uv graf G dobija konturu. Označimo je sa C. $C - uv$ je $(u-v)-$put u G. Dakle, G je povezan. Neka je uv proizvoljna grana u G. Ako bi $G - uv$ bio povezan, u $G - uv$ bi postojao put P koji počinje u u i završava u v, Tada bi $P + uv$ bila kontura u G.

□

Posljedica 1. *U svakom povezanom grafu postoji razaponjuće stablo*

Obilježeni graf sa n čvorova je graf čiji su čvorovi označeni brojevima 1, 2, …, n ili slovima $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dva obilježena grafa G_1 i G_2 sa n čvorova su različita ako postoji grana ij koja pripda jednom ali ne i drugom grafu. Postoji jednostavna formula za određivanje broja takozvanih obilježenih razaponjućih stabala, to jeste stabala u kojima se izomorfna ne poistovjećuju, dok je određivanje broja neizomorfnih razapinjućih stabala složen problem.

Grana koja nije petlja je karika. Ako je e karika, kontrakcija (multi)grafa G po grani e, u oznaci $G \cdot e$, je graf dobijen iz G udaljavanjem grane e i poistovjećivanjem njenih krajnjih čvorova. Za obilježeni multigraf G sa $\tau(G)$ ćemo označavati broj njegovih (obilježenih) razapinjućih stabala.

Teorema 2. *Neka je e karika u multigrafu G. Tada je*

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}(G)$ familija svih razapinjućih stabala multigrafa G. Označimo sa $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}(G)$ familiju razapinjućih stabala koja sadrže granu e, a sa $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}(G)$ familiju razapinjućih stabala koja ne sadrže e. Tada je $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2|$ i $\mathcal{A}(G - e) = \mathcal{A}_1$. Sa druge strane, svakom stablu $T \in \mathcal{A}_2$

odgovara stablo $T \cdot e \in \mathcal{A}(G \cdot e)$ i ova korespodencija je uzajamno jednoznačna. Na osnovu principa jednakosti, $|\mathcal{A}_2| = |\mathcal{A}(G \cdot e)|$.

$\square$

Broj razapinjućih stabala moguće je odrediti i primjenom matrice incidencije:

Teorema 3. *(Matrična teorema o stablima) Neka je G multigraf bez petlji, $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ skup čvorova multigrafa G i M njegova matrica incidencije. U svakoj koloni matrice M zamijenimo jednu 1 sa -1. Tako dobijenu matricu označimo sa N. Neka je N_0 dobijena iz N udaljavanjem jedne vrste. Tada je*

$$\tau(G) = det(N_0 \cdot N_0^T) = detQ_0,$$

gdje je Q_0 bilo koja $(n-1) \times (n-1)$ podmatrica $n \times n$ matrice $Q = (q_{ij})$, u kojoj je

$$q_{ij} = \begin{cases} d(i) & , \quad i = j \\ -(broj\ ij\ grana) & , \quad i \neq j \end{cases}$$

Lema 2. *Neka su $1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, čvorovi, a d_1, d_2, $\ldots$, d_n prirodni brojevi takvi da važi $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. Tada je broj obilježenih stabala nad skupom čvorova $\{1, 2, \ldots, n\}$ tako da važi $d(i) = d_i$, $i = \overline{1, n}$, jednak*

$$\frac{(n-2)!}{(d_1 - 1)!(d_2 - 1)! \ldots (d_n - 1)!}.$$

Dokaz: Indukcijom po n. Za $n = 2$ trivijalno.

Neka je $n \geq 3$, tvrđenje važi za $n-1$ i d_1, d_2, $\ldots$, d_n su prirodni brojevi takvi da važi $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. Postoji čvor i stepena 1 (pokažite!). Određenosti radi, neka je to čvor n. Pitanje je koliko ima stabala sa n čvorova: $1, 2, \ldots, n-1, n$, stepena d_1, d_2, $\ldots$, d_{n-1},1, redom, tako da je $\sum_{i=1}^{n-1} d_i = 2n - 3$. Neka je $\mathcal{A}$ familija svih ovakvih stabala. Tada je $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_{n-1}$, gdje je $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$ familija stabala u kojima je viseći čvor n susjed sa čvorom i. Da bi smo odredili $|\mathcal{A}_i|$, udaljimo iz grafa G čvor n i njemu incidentnu granu in. Niz prirodnih brojeva d_1, d_2, $\ldots$, d_{i-1}, $d_i - 1$, d_{i+1}, d_{i+2}, $\ldots$, d_{n-1} zadovoljava jednakost

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_{i-1} + (d_i - 1) + d_{i+1} + d_{i+2} + \ldots + d_{n-1} = 2n - 4 = 2(n-1) - 2,$$

pa je, na osnovu induktivne pretpostavke,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_i| &= \frac{(n-3)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!...(d_{i-1}-1)!(d_i-2)!(d_{i+1}-1)!...(d_{n-1}-1)!} \\ &= (d_i-1)\frac{(n-3)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i-1)!} \end{aligned}$$

Otuda,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= \sum_{i=1}^{n}|\mathcal{A}_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(d_i-1)\frac{(n-3)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!...(d_{n-1}-1)!} \\ &= \frac{(n-3)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i-1)!}((2n-3)-(n-1)) \\ &= \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i-1)!} \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4. *(Kejlijeva formula, 1889.) Broj obilježenih razapinjućih stabala nad skupom od n čvorova je $\tau(K_n) = n^{n-2}$.*

Dokaz: Na osnovu prethodne teoreme i polinomijalne formule dobijamo:

$$\begin{aligned} \tau(K_n) &= \sum_{\substack{d_1,d_2,\ldots,d_n \geq 1 \\ d_1+\ldots+d_n=2(n-1)}} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i-1)!} \\ &= \sum_{\substack{d_1,d_2,\ldots,d_n \geq 0 \\ d_1+\ldots+d_n=n-2}} \frac{(n-2)!}{d_1!\ldots d_n!} \\ &= n^{n-2} \end{aligned}$$

$\square$